

**PROPOSITION DE SUJET POUR UN CONTRAT DOCTORAL/  
Clôture des candidatures le : 1er juin.**

<b>Laboratoire</b> LaSIE
<b>Titre de la thèse</b> Etude et stabilisation de modèles de tension de surface
<b>Direction de la thèse</b> <i>directeur-trice-s (grade, HDR) et éventuels co-directeur-trice-s</i> Sébastien Court et Aziz Hamdouni.
<b>Adéquation scientifique avec les priorités de l'établissement</b> <p>Le sujet propose d'étudier des modèles mathématiques afin de mieux comprendre la dynamique des vagues, de la houle et des interfaces air-eau. Aussi la tension de surface influence-t-elle :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- les interactions entre vents, surface de l'eau et sédiments,</li> <li>- la forme et la stabilité des interfaces (comme les nappes d'eau ou les films polluants en surface).</li> </ul> <p>L'intégration de phénomènes de tension de surface dans les modèles hydrodynamiques permettra des prévisions plus précises des phénomènes en surface, essentiels pour comprendre l'évolution du trait de côte et améliorer la fiabilité des modèles de submersion marine.</p>
<b>Descriptif du sujet</b> <i>(enjeux scientifiques, applicatifs, sociétaux...)</i> <p>Les phénomènes de tension de surface concernent la dynamique de gouttes de liquides, de bulles enfermant du gaz, et aussi les phénomènes de capillarité (lorsque des problèmes de contact interviennent). Plus généralement, il s'agit d'étudier les interactions entre deux fluides (possiblement de nature différente) séparés par une interface, et supposés visqueux et incompressibles. À l'échelle macroscopique, la courbure moyenne de cette interface induit un saut de la trace normale du tenseur de Cauchy. La réponse des deux fluides se manifeste par l'égalité des vitesses à l'interface, qui va alors déterminer la manière de coupler la déformation de cette interface. Nous proposons d'étudier mathématiquement les déformations d'une interface enfermant un premier fluide, plongée dans un second fluide environnant. Les deux fluides sont supposés visqueux et incompressible. C'est typiquement le cas d'une bulle de savon, ou d'une goutte d'eau. Nous nous appuierons sur des modèles mathématiques introduits dans [1] et [2]. L'étude mathématique de ce type de modèles présente des enjeux non triviaux à la frontière entre équations aux dérivées partielles et géométrie différentielle. Il s'agit d'étudier les équations d'évolution gouvernant les déformations de l'interface, et d'en dériver les conditions de stabilité, à l'aide de la théorie des opérateurs. Ce type de sujet, largement étudié d'un point de vue des applications en mécanique ou en calcul scientifique, n'a que très peu été étudié d'un point de vue théorique. L'objectif principal de ce projet est de généraliser en 3D et à nombre de Reynolds intermédiaire des résultats obtenus en 2D à bas nombre de Reynolds [2], à savoir des résultats d'existence de solutions (locales ou globales), de formulation opérateur, et de propriétés de stabilité et/ou de stabilisabilité. Cette extension à la 3D et aux équations de Navier-Stokes présente des défis de toute autre nature, car dans ce cas l'interface est une surface (et non pas simplement une courbe), et le caractère instationnaire des équations de Navier-Stokes introduit des difficultés nouvelles.</p> <p>Méthodologie : Nous nous référerons aux théorèmes d'unicité d'Alexandrov afin de déterminer les surfaces à courbure moyenne constante sous des hypothèses particulières, comme celle mentionnant que l'interface enferme un domaine borné. Ensuite, afin de dériver le système linéaire, nous aurons besoin d'étudier les prolongements (possiblement harmoniques) des difféomorphismes initialement définis sur une variété. Cette question est hautement non trivial en 3D, notamment lorsque nous avons besoin de déduire des régularités de type Sobolev par exemple. Les difféomorphismes ainsi prolongés nous permettront de réécrire le système initial en coordonnées Lagrangiennes, c'est-à-dire en domaines spatiaux de référence, ne dépendant pas du temps. Par ce biais, la courbure moyenne s'exprime en termes de l'opérateur de Laplace-Beltrami, dont le transport doit être exprimé de manière explicite, afin de déterminer l'opérateur linéaire associé, lorsque nous linéarisons le problème. Pour la dérivation d'une formulation opérateur abstraite, nous pourrions nous inspirer des méthodes développées dans [3] ou [4]. Nous devrions alors pouvoir dégager un opérateur générant un</p>

semi-groupe analytique de contraction, ce qui nous permettra d'établir que le spectre de l'opérateur est discret et localisé dans un secteur angulaire. La conséquence principale est la localisation des modes instables, en nombre fini. La projection du système linéaire sur l'espace propre de dimension finie associé à ces modes instables nous permettra de réduire la question de la stabilisation du système linéarisé à un problème de dimension finie, où la stabilisabilité par feedback est impliquée par la contrôlabilité approchée. Cette dernière sera obtenue en utilisant ou en dérivant des propriétés de continuation unique. Nous montrerons à l'aide d'une méthode de point fixe que le contrôle stabilisant le système linéaire permet de définir un contrôle qui stabilise le système original, non linéaire, en supposant les données du problème assez petites. La simulation de ce type de problèmes sera effectuée par une méthode élément finis couplée à une approche de type domaines fictifs [5]. Notons ici une difficulté liée au fait que les lois de feedback auront été obtenues pour le problème linéarisé autour d'états stationnaires, tandis que les simulations peuvent requérir le calcul d'opérateurs feedbacks pour d'autres géométries.

[1] J. Prüss and G. Simonett. "On the two-phase Navier-Stokes equations with surface tension". In: *Interfaces Free Bound.* 12.3 (2010), pp. 311–345. issn: 1463-9963. url: <https://doi.org/10.4171/IFB/237>.

[2] S. Court. "Feedback Stabilization of a Two-Fluid Surface Tension System Modeling the Motion of a Soap Bubble at Low Reynolds Number: The Two-Dimensional Case". In: *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* 26.1 (2023). issn: 1422-6952. url: <https://doi.org/10.1007/s00021-023-00841-4>.

[3] J.-P. Raymond. "Feedback stabilization of a fluid-structure model". In: *SIAM J. Control Optim.* 48.8 (2010), pp. 5398–5443. issn: 0363-0129. url: <https://doi.org/10.1137/080744761>

[4] S. Court. "Stabilization of a fluid-solid system, by the deformation of the self-propelled solid. Part I: The linearized system". In: *Evol. Equ. Control Theory* 3.1 (2014), pp. 59–82. issn: 2163-2472. url: <https://doi.org/10.3934/eect.2014.3.59>

[5] S. Court. "A fictitious domain approach for a mixed finite element method solving the two-phase Stokes problem with surface tension forces". In: *J. Comput. Appl. Math.* 359 (2019), pp. 30–54. issn: 0377-0427. url: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.03.029>.

**Contexte partenarial** (*cotutelle internationale, EU-CONEXUS, partenariat avec un autre laboratoire, une entreprise...*)

**Impacts** (*scientifiques, technologiques, socio-économiques, environnementaux, sociétaux...*)

Ce sujet couple divers domaines des mathématiques pures et appliquées, ce qui permettra au candidat de devenir expert dans un large éventail de domaines tels que les EDPs paraboliques, la géométrie différentielle appliquée, ou la théorie des opérateurs.

Les problèmes abordés dans cette thèse interviennent plus largement et malheureusement plus classiquement dans la formation de nappes polluantes à la surface de l'eau.

L'étude de ce type de problèmes peut aussi avoir des conséquences industrielles, sur la fabrication de peintures pour carrosserie par exemple, le contrôle s'effectuant à l'aide de surfactants et/ou de champs magnétiques, en pratique.

Elle peut aussi avoir des conséquences en Biologie, où les phénomènes de tension de surface interviennent au niveau cellulaire, ou dans la modélisation des globules.

**Programme de travail du doctorant** (*tâches confiées au doctorant*)

Le doctorant sera guidé par la réalisation des tâches suivantes :

0. Détermination de modèles couplant la mécanique des fluides et la tension de surface, introduite de manière géométrique.
1. Identification rigoureuse des états stationnaires, en particulier la géométrie de la surface correspondant à ces états stationnaires.
2. Adresser la question du prolongement de difféomorphismes initialement définis sur une surface de référence.
3. Linéarisation du modèle au voisinage de ces états stationnaires.
4. Dérivation rigoureuse d'une formulation opérateur représentant le modèle linéarisé.
5. Étude des propriétés spectrales des opérateurs.
6. Obtention de solutions fortes (locales ou globales).
7. Contrôlabilité approchée et stabilisabilité du système linéaire.
8. Dérivation de lois de feedbacks pour le contrôle.
9. Stabilisation du système non linéaire.
10. Illustration numérique des résultats de stabilisation.

### **Calendrier de réalisation**

Les tâches 0 et 1 seront réalisées durant les mois 1–6.

Les tâches 3, 4 et 5 seront réalisées durant les mois 7–18.

La tâche 2 est transverse, et dépendra en particulier de la façon dont les tâches 6 et 9 seront adressées.

(L'existence de prolongement de difféomorphismes pourra, dans un premier temps, être supposée.)

Les tâches 6 et 9 seront adressées durant les mois 25–30.

Les tâches 7 et 8 seront réalisées durant les mois 19–30.

La tâche 10 sera réalisée durant les mois 31–36.

Les avancées seront validées par la rédaction d'articles scientifiques soumis à des journaux (*peer-reviewed*) qui ne laissent aucun doute sur leur qualité scientifique.

### **Accompagnement du doctorant / Fonctionnement de la thèse** (*accompagnement humain, matériel, financier, en particulier pour la prise en charge du fonctionnement de la thèse et des dépenses associées*)

Le doctorant sera accompagné de manière régulière, avec des rendez-vous hebdomadaires durant au moins les 6 premiers mois, puis des rendez-vous adaptés au rythme des avancées.

Un poste de travail et un ordinateur seront mis à sa disponibilité. Le laboratoire prendra en charge ses déplacements pour participer à des colloques.

**Étude et Stabilisation de modèles de tension de surface**

## Description

Nous recherchons une étudiante ou un étudiant pour travailler à l'interface entre les équations de la mécanique des fluides et la géométrie différentielle. Plus précisément nous étudierons les aspects mathématiques des phénomènes de surface tension se produisant entre deux fluides visqueux et incompressibles séparés par une interface. La courbure moyenne de cette dernière induit un saut de la trace normale du tenseur de Cauchy, qui gouverne le comportement des fluides environnants. Comme ce sujet balaie des domaines mathématiques différents, diverses questions peuvent être abordées dans ce projet de thèse, dépendant des préférences de la personne recrutée : géométrie différentielle, caractère bien posé pour des systèmes couplés d'équations aux dérivées partielles, formulations opérateur abstraites, flots guidés par la courbure moyenne, optimisation, contrôle et stabilisation, méthodes éléments finis.

## Contexte

La personne recrutée jouira de l'environnement interdisciplinaire et stimulant du laboratoire LaSIE (*Laboratoire des Sciences de l'ingénieur pour l'environnement*) et des infrastructures d'un campus situé au bord de l'océan.

## Durée

3 ans, à partir du 1er octobre 2026.

## Prérequis

Master en Mathématiques Pures ou Appliquées. Anglais courant.

## Mots-clés

Tension de surface, équations de Navier-Stokes, Flots guidés par la courbure moyenne, géométrie différentielle, systèmes couplés d'EDP, théorie des opérateurs, théorie du contrôle et stabilisation, méthodes éléments finis.

## Comment postuler ?

Envoyez votre CV et le nom d'une référence à l'une des personnes listées ci-dessous.

## Contact

N'hésitez pas à nous contacter si vous avez des questions.

Contacts :

sebastien.court@univ-lr.fr

aziz.hamdouni@univ-lr.fr

## Références

- [1] S. COURT. "A fictitious domain approach for a mixed finite element method solving the two-phase Stokes problem with surface tension forces". In : *J. Comput. Appl. Math.* 359 (2019), p. 30-54. ISSN : 0377-0427. URL : <https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.03.029>.
- [2] S. COURT. "Feedback Stabilization of a Two-Fluid Surface Tension System Modeling the Motion of a Soap Bubble at Low Reynolds Number: The Two-Dimensional Case". In : *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* 26.1 (2023). ISSN : 1422-6952. URL : <https://doi.org/10.1007/s00021-023-00841-4>.
- [3] J. PRÜSS et G. SIMONETT. "On the two-phase Navier-Stokes equations with surface tension". In : *Interfaces Free Bound.* 12.3 (2010), p. 311-345. ISSN : 1463-9963. URL : <https://doi.org/10.4171/IFB/237>.

**Study and Stabilization of surface tension models**

## Description

We are looking for a PhD candidate for working at the interface between the equations of Fluid Mechanics and Differential Geometry. More specifically we will study the mathematical aspects of surface tension phenomena arising between two incompressible fluids separated by an interface. The mean curvature of the latter induces a jump of the normal trace of the Cauchy stress tensor, which governs the behavior of the surrounding fluids. As this topic encompasses different mathematical fields, various different tasks can be the scope of this thesis project, depending on the candidate's preferences: Differential Geometry, wellposedness for coupled systems of partial differential equations, abstract operator formulations, mean-curvature-driven flows, optimization, control and stabilization, finite element simulations.

## Context

The successful candidate will enjoy an interdisciplinary environment at the vibrant LaSIE (*Laboratoire des Sciences de l'ingénieur pour l'environnement*) and the infrastructures of a seashore campus at the young University of La Rochelle (France).

## Duration

3 years, starting on October 1st, 2026.

## Prerequisites

Master in Applied Math. or Pure Mathematics. Proficiency in English.

## Keywords

Surface tension, Navier-Stokes equations, Mean-curvature-driven flows, Differential Geometry, Coupled systems of PDEs, Operator theory, Control and Stabilization theory, Finite Element Methods.

## How to apply?

Send your CV and the name of a reference at the persons listed below.

## Contact

Do not hesitate to request more details on the project.

Contacts:

sebastien.court@univ-lr.fr

aziz.hamdouni@univ-lr.fr

## References

- [1] S. Court. “A fictitious domain approach for a mixed finite element method solving the two-phase Stokes problem with surface tension forces”. In: *J. Comput. Appl. Math.* 359 (2019), pp. 30–54. ISSN: 0377-0427. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.03.029>.
- [2] S. Court. “Feedback Stabilization of a Two-Fluid Surface Tension System Modeling the Motion of a Soap Bubble at Low Reynolds Number: The Two-Dimensional Case”. In: *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* 26.1 (2023). ISSN: 1422-6952. URL: <https://doi.org/10.1007/s00021-023-00841-4>.
- [3] J. Prüss and G. Simonett. “On the two-phase Navier-Stokes equations with surface tension”. In: *Interfaces Free Bound.* 12.3 (2010), pp. 311–345. ISSN: 1463-9963. URL: <https://doi.org/10.4171/IFB/237>.